目录

目录

第一章　线性空间及线性算子

1.1　$\mathbf{R}^3$ 空间向量分析

1.1.1　向量概念

- 标积：$A \cdot B = |A||B|\cos\theta$

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= (\ A_i \boldsymbol{e}_i\ )\ \cdot\ (\ B_j \boldsymbol{e}_j) \\
&= A_i B_j e_i \cdot e_j \\
&= A_i B_j \delta_{ij}
\end{aligned}
$$

- 矢积：$A \times B = \mathbf{e}|A||B|\sin\theta$

  对三阶行列式，引入 Levi-Civita 符号：$\Delta\ = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\ = \boldsymbol{\varepsilon}_{ijk} a_i b_j c_k$

  $\mathbf{R}^3$ 中的向量积可写成

$$A \times B\ =\ e_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

  或写成分量的表示形式

$$(A \times B)_i\ =\ \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

- 矢量坐标分量表示法: $A = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k} = A_i \hat{\boldsymbol{e}}_i$

1.1.2　$\mathbf{R}^3$ 空间向量代数

1. 运算规则符号：

   (a) Einstein 求和约定：$A = A_i e_i$

   (b) Kronecker　符号：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases}$$

   (c) Levi-Civita 符号：

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k)\ \text{是偶排列} \\ -1 & (i,j,k)\ \text{是奇排列} \\ 0 & (i,j,k)\ \text{有相同者} \end{cases}$$

Theorem 1.1.1 单位全反对称张量乘积公式：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

证明：注意到，Levi-Civita 符号可由单位向量混合积得到：

$$\epsilon_{ijk} = [e_i e_j e_k] = \begin{vmatrix} e_{i1} & e_{i2} & e_{i3} \\ e_{j1} & e_{j2} & e_{j3} \\ e_{k1} & e_{k2} & e_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

下面考虑一般形式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \xlongequal{l\to i} \begin{vmatrix} 3 & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 3(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) - \delta_{im}(\delta_{ji}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{ki}) + \delta_{in}(\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{ki}) \\ &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \end{aligned}$$

2. R^3 空间向量运算

   (a) 加法：$A + B = (A_1 + B_1)e_1 + (A_2 + B_2)e_2 + (A_3 + B_3)e_3 = (A_i + B_i)e_i$

   (b) 数乘：$\alpha A = \alpha A_1 e_1 + \alpha A_2 e_2 + \alpha A_3 e_3 = \alpha A_i e_i$

   (c) 标积：$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = A_i B_i$

   (d) 矢积：$A \times B = \epsilon_{ijk} e_i A_j B_k$

1.1.3 R^3 空间矢量分析

Definition 1.1.1 *nabla* 算子/哈密顿 *(Hamilton)* 算符

$$\nabla = e_i \partial_i = e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Definition 1.1.2 *Laplace* 算符

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = (e_i \partial_i) \cdot (e_j \partial_j) = \delta_{ij} \partial_i \partial_j = \partial_i \partial_i$$

Definition 1.1.3 标量场的梯度

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = e_i \partial_i \varphi$$

Definition 1.1.4 向量场的散度

$$\mathrm{div} A = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \partial_i A_i$$

Definition 1.1.5 向量场的旋度

$$\mathrm{Curl}\, A = \nabla \times A = \varepsilon_{ijk} e_i \partial_j A_k$$

Theorem 1.1.2 *Gauss* 公式

$$\int_{\partial V} A \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V \nabla \cdot A \mathrm{d}V$$

Lemma 1.1.1 *Green* 公式

$$\int_{\partial V}\psi\nabla\,\varphi\,\cdot\,d\boldsymbol{\sigma}=\int_{\partial V}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\int_V(\psi\nabla^2\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)\mathrm{d}V$$

$$\int_{\partial V}(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi)\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_V(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V$$

Theorem 1.1.3 *Stokes* 公式

$$\oint_{\partial S}A\cdot\mathrm{d}l=\int_S(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\sigma$$

Lemma 1.1.2 调和函数的两个基本性质：

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega=0$$

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{S_R}u\mathrm{d}\sigma$$

Proof 1.1.1 由 *Gauss* 公式导出 *Green*（格林）公式

对于定义在体积 V 及其边界 aV 上的两个标量场 $\psi\,(x)\,,\varphi\,(x)$ ，有 *Green* 公式，它是 *Gauss* 公式的直接结果，即

$$\begin{aligned}\int_{aV}\psi\,\nabla\,\varphi\,\cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}&=\int_{\nu}\nabla\,\cdot\,(\,\psi\,\nabla\,\varphi\,)\,\mathrm{d}V\\&=\int_{\nu}(\,\psi\,\nabla^2\varphi\,+\,\nabla\,\psi\,\cdot\,\nabla\,\varphi\,)\,\mathrm{d}V\end{aligned}$$

若 n 为 $d\sigma$ 上的单位法向量，则

$$\nabla\,\varphi\,\cdot\,d\boldsymbol{\sigma}\,=\,\nabla\,\varphi\,\cdot\,nd\sigma\,=\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma$$

Green 公式可表为：

$$\int_{\partial V}\psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\,=\,\int_V(\,\psi\,\nabla^2\varphi\,+\,\nabla\,\psi\,\cdot\,\nabla\,\varphi\,)\,\mathrm{d}V$$

Green 公式的另一种表述为

$$\int_{s\nu}(\psi\,\nabla\,\varphi-\varphi\,\nabla\,\psi\,)\,\cdot\,\mathrm{d}\sigma\,=\,\int_{\nu}(\psi\,\nabla^2\varphi-\varphi\,\nabla^2\psi\,)\,\mathrm{d}V$$

1.1.4 R^3 空间向量分析的重要公式

1. $\nabla\cdot r=3$
2. $\nabla\times r=0$
3. $\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi$
4. $\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$
5. $\nabla\cdot(A+B)=\nabla\cdot A+\nabla\cdot B$
6. $\nabla\times(A+B)=\nabla\times A+\nabla\times B$
7. $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot A$
8. $\nabla\times\,(\varphi A)=A\times\,(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot A$
9. $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$
10. $\nabla\times(A\times B)=(B\cdot\nabla)A-B(\nabla\cdot A)-(A\cdot\nabla)B+A(\nabla\cdot B)$

11. $\nabla(A\cdot B)=(B\cdot\nabla)A+(A\cdot\nabla)B+B\times\nabla\times A+A\times\nabla\times B$

12. $\nabla\times\nabla\varphi=0$

13. $\nabla\cdot(\nabla\times A)=0$

14. $\nabla\times\nabla\times A=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A$

15. $(\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{A}^2$.

12 式说明，对一个纯标量势场，其梯度场是个无旋场，即其梯度场的旋度为零；13 式说明，对一个纯旋量场，其散度场为零，即纯旋量场是个无散度的场.

Proof 1.1.2 证明 *14*

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times A) \quad &=\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}\boldsymbol{e}_i\partial_j\left(\ \nabla\times A\ \right)_k\\
&=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}\partial_j\boldsymbol{\varepsilon}_{klm}\partial_l A_m\\
&=e_i\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\partial_j\partial_l A_m\\
&=e_i(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l A_m\\
&=e_i\partial_i\partial_j A_j-e_i\partial_j\partial_j A_i\\
&=\nabla\left(\nabla\cdot A\right)-\nabla^2 A\\
\nabla^2\ \text{为}\ \textit{Laplace}\quad &\text{算子}\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\partial_i\partial_i
\end{aligned}
$$

Example 1.1.1 若 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 为 $\mathbf{R}^3$ 空间中的标量函数，$A(\boldsymbol{r})$ 和 $B(\boldsymbol{r})$ 为此空间中的向量函数，请证明：

(1)$\nabla\cdot(\varphi A)=A\cdot(\nabla\varphi)+\varphi\nabla\cdot A$;

(2)$\nabla\times(\varphi A)=\varphi\nabla\times A-A\times(\nabla\varphi)$;

(3)$\nabla\times(A\times B)=(B\cdot\nabla)A-B(\nabla\cdot A)-(A\cdot\nabla)B+A(\nabla\cdot B)$;

(4)$\nabla(A\cdot B)=(B\cdot\nabla)A+(A\cdot\nabla)B+B\times\nabla\times A+A\times\nabla\times B$.

Proof 1.1.3

$$
\begin{aligned}
&\textit{(3)}\nabla\times(A\times B)\\
&=e_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(A\times B\right)_k=e\varepsilon_{ijki}\partial_j\left(\varepsilon_{kmn}a_m b_n\right)\\
&=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}\boldsymbol{\varepsilon}_{kmn}\partial_j\left(a_m b_n\right)=\boldsymbol{e}_i\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}\right)\partial_j\left(a_m b_n\right)\\
&=\boldsymbol{e}_i\delta_{im}\delta_{jn}\left(\partial_j a_m\right)b_n-\boldsymbol{e}_i\delta_{in}\delta_{jm}\left(\partial_j a_m\right)b_n+\boldsymbol{e}_i\delta_{im}\delta_{jn}a_m\left(\partial_j b_n\right)-\boldsymbol{e}_i\delta_{in}\delta_{jm}a_m\left(\partial_j b_n\right)\\
&=\boldsymbol{e}_i b_j\left(\partial_j a_i\right)-\boldsymbol{e}_i\left(\partial_j a_j\right)b_i+\boldsymbol{e}_i a_i\left(\partial_j b_j\right)-\boldsymbol{e}_i a_j\left(\partial_j b_i\right)\\
&=\left(b_j\partial_j\right)a_i\boldsymbol{e}_i-\left(\partial_j a_j\right)b_i\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_i a_i\left(\partial_j b_j\right)-\left(a_j\partial_j\right)b_i\boldsymbol{e}_i\\
&=\Big(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\Big)\boldsymbol{A}-\Big(\nabla\cdot\boldsymbol{A}\Big)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\Big(\nabla\cdot\boldsymbol{B}\Big)-\Big(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Big)\boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

(4) 由等式右边往左边证较为简单, 等式右边为

$$
\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\nabla\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\nabla\times\boldsymbol{B}\\
&=\left(b_i\partial_i\right)A+\left(a_i\partial_i\right)B+e_i\varepsilon_{ijk}b_j\left(\nabla\times A\right)_k+e_i\varepsilon_{ijk}a_j\left(\nabla\times B\right)_k\\
&=b_i\partial_i A+a_i\partial_i B+e_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}b_j\partial_l a_m+e_i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_j\partial_l b_m\\
&=b_i\partial_i A+a_i\partial_i\boldsymbol{B}+\boldsymbol{e}_i\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)b_j\partial_l a_m+\boldsymbol{e}_i\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)a_j\partial_l b_m\\
&=b_i\partial_i a_j\boldsymbol{e}_j+a_i\partial_i b_j\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_i b_j\partial_i a_j-\boldsymbol{e}_i b_j\partial_j a_i+\boldsymbol{e}_i a_j\partial_i b_j-\boldsymbol{e}_i a_j\partial_j b\\
&=e_i b_j\partial_i a_j+e_i a_j\partial_i b_j\\
&=b_j\nabla a_j+a_j\nabla b_j\\
&=\nabla(a_j b_j)\\
&=\nabla(A\cdot B)
\end{aligned}
$$

Example 1.1.2 若刚体以定角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动，有一粒子固定于刚体以速度 $\boldsymbol{\nu}$ 运动，求证

$$\nabla\times\nu=2\omega$$

(提示：由 $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}_c+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$, 取质心 c 为参考点，建立坐标系，$\boldsymbol{\nu}_c=0$)

证*:* 取质心 c 为参考点，建立坐标系，则在此坐标系中 $\nu_c=0$, 有

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\nu&=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\\
&=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}\partial_j\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)_k\\
&=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\varepsilon}_{ijk}\boldsymbol{\varepsilon}_{klm}\partial_j\left(\boldsymbol{\omega}_l x_m\right)\\
&=\boldsymbol{e}_i\left(\boldsymbol{\delta}_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\left[\left(\partial_j\omega_l\right)x_m+\omega_l\partial_j x_m\right]\\
&=\boldsymbol{e}_i\left(\omega_i\partial_j x_j-\omega_j\partial_j x_i\right)\\
&=\boldsymbol{\omega}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{r}\right)-\boldsymbol{e}_i\omega_j\delta_{ij}=3\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}\\
&=2\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

其中，ω_l 为常数，故 $\partial_j\omega_l=0$, 并用到 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$.

Example 1.1.3 在 $\mathbf{R}^3$ 空间中，对于定义在单连通区域 Ω 上的向量场 $A(\boldsymbol{r})$, 若 A 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的法向值完全确定，且 A 在 Ω 上的散度和旋度存在

$$\nabla\cdot A=q$$

$$\nabla\times A=H$$

请证明：在 Ω 上这样的向量场 A 是唯一的. 这一结论被称为亥姆霍兹 *(Helmholtz)* 定理.

证*:* 设 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=q$,$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 在 $\partial\Omega$ 上法向取值完全与 A 相同. 又设 $W=A-B$, 则有

$$\nabla\cdot W=q-q=0,\quad\nabla\times W=H-H=0$$

则可定义势函数 $\varphi(r),W=-\nabla\varphi$, 此 $\varphi(r)$ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi(r)=0$$

由格林 *(Green)* 公式

$$\int_{\partial\Omega} u\nabla\nu\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\Omega} u\nabla^2\nu \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla\nu\mathrm{d}\Omega$$

取 $u=\nu=\varphi$, 由于 $W=-\nabla\varphi$, 且 A,B 在 $\partial\Omega$ 上法向的值相同，故 W 在 $\partial\Omega$ 上法向的值为零，即 $\nabla\varphi{\cdot}d\sigma=0$, 有

$$\int_{\Omega}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega} W\cdot W\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega}|W|^2\,\mathrm{d}\Omega = 0$$

故在 Ω 上 $W=0$, 即 $B=A$

Example 1.1.4 ***(*杨书1.14**) 有一物理体系，它由三个向量场 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},A$ 和一个实标量场 V 来描述，并且 $E,\boldsymbol{H},A$ 和 V 满足如下关系：

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot E = -\mu^2 V\\
&E = \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla V\\
&H = \nabla\times A\\
&\nabla\times H = \frac{\partial E}{\partial t} - \mu^2 A
\end{aligned}$$

其中，μ 为正的常数. 求证：

$$\nabla\cdot A + \frac{\partial V}{\partial t} = 0\,;$$

(2) $\nabla^2\cdot V - \mu^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ *;*

时，则在 ϱ 中 $V=0$.

(3) 当我们考虑在区域 Ω 中，V 与时间无关，且在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上有 $V|_\partial\Omega=0$

1.

1.2 R^3 空间中曲线坐标系中的矢量分析

1.2.1 R^3 空间中的曲线系

Definition 1.2.1 在 *Cartesian* 坐标系中，空间一点坐标可由三个独立坐标参数 (u_1,u_2,u_3) 描述，且与 *Cartesian* 坐标参数 (x_1,x_2,x_3) 存在单值的函数变换关系，则坐标参数 (u_1,u_2,u_3) 构成 $\mathbf{R}^3$ 空间中的**曲线系**。如果此曲线系下每一点都有过此点的三条坐标曲线切向量相互正交，则称为**正交曲线系**。令其过渡矩阵等于一常向量，就得到用 (x_1,x_2,x_3) 表示的三个**坐标曲面**：

$$u^1(x_1,x_2,x_3)=c_1 u^2(x_1,x_2,x_3)=c_2 u^3(x_1,x_2,x_3)=c_3$$

其中，每两个坐标曲面相交而成**坐标曲线**。

1.2.2 曲线系中的度量

Definition 1.2.2 度量系数

空间曲线的弧微分，有如下的公式

$$\mathrm{d}s \;=\; \sqrt{\mathrm{d}x^2 \;+\; \mathrm{d}y^2 \;+\; \mathrm{d}z^2}$$

只研究坐标曲线 u_1 上的变化，则

$$\mathrm{d}x=\frac{\partial x}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1+\frac{\partial x}{\partial u_2}\mathrm{d}u_2+\frac{\partial x}{\partial u_3}\mathrm{d}u_3=\frac{\partial x}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1$$

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1,\quad \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u_1}\mathrm{d}u_1.$$

因此

$$ds_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2}du_1.$$

令

$$h_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}$$

$$\mathrm{d}s_i=h_i\mathrm{d}u_i$$

h_i 即被称为拉梅系数。

2. 一般曲线的弧微分

现在我们来证明：在曲线坐标系为正交的条件下；一般曲线的弧微分 $\mathrm{d}s$ 与坐标曲线的弧微分 $\mathrm{d}s_1,\mathrm{d}s_2,\mathrm{d}s_3$ 之间有如下关系：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}s_1^2+\mathrm{d}s_2^2+\mathrm{d}s_3^2, \tag{2.6}$$

证 设空间一点 M 的矢径为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

其中 x,y,z 都是曲线坐标 q_1,q_2,q_3 的函数. 由导矢的几何意义，可知 $\boldsymbol{r}$ 对 q_i 的导数

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k}\quad(i=1,2,3) \tag{2.7}$$

为在 M 点处坐标曲线 q_i 上的切向矢量，且指向 q_i 增大的一方. 就是说，与对应的切线单位矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 平行且同指向；又由上式可以看出

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right|=H_i\quad(i=1,2,3),$$

所以

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}=H_i\boldsymbol{e}_i\quad(i=1,2,3). \tag{2.8}$$

因此，在坐标系为正交的条件下，就有

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_j}=\begin{cases}0 & (i\neq j),\\ H_i^2 & (i=j)\end{cases}\quad(i,j=1,2,3),$$

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3\right)^2 \\
&= H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 + 2\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}dq_1 dq_2 \\
&\quad + 2\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}dq_1 dq_3 + 2\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}dq_2 dq_3 \\
&= ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 + 0 + 0 + 0 \\
&= ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2.
\end{aligned}
$$

在此证明中,我们还可以看到直角坐标(x,y,z)与正交曲线坐标(q_1,q_2,q_3)的微分之间,有如下的平方和关系:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2. \qquad (2.9)$$

这个关系,又给我们提供了一种计算拉梅系数 H_i 的方法,它比直接应用 H_i 的定义式(2.2)来计算,有时还要方便些,参看下面的

例 2　求柱面坐标(ρ,φ,z)和球面坐标(r,θ,φ)的拉梅系数.

解　用拉梅系数的定义式(2.2),不难算出:

柱面坐标系的拉梅系数为

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1. \qquad (2.16)$$

球面坐标系的拉梅系数为

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta. \qquad (2.17)$$

由于柱面坐标系和球面坐标系都是正交的,故亦可用公式(2.9)来计算. 作为例子,下面就用此公式再计算本例的拉梅系数:

在柱面坐标系中:

$$
\begin{aligned}
x = \rho\cos\varphi, \quad y &= \rho\sin\varphi, z = z, \\
dx &= \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi, \\
dy &= \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi, \\
dz &= dz.
\end{aligned}
$$

于是

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

据公式(2.9)即知

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1.$$

对正交曲线系有：

$$g_{ij}=\frac{\partial x^k}{\partial u_i}\frac{\partial x^k}{\partial u_j}$$

$$g_{ij}=\begin{cases}g_{ii} & i=j\\ \\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

Definition 1.2.3 度量分量 正交曲线系的度量分量是度量系数的根：

$$h_i=\sqrt{g_{ii}}$$

1. 一般正交曲线系

(1) 线元：

$$\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j=g_{11}(\mathrm{d}u_1)^2+g_{22}(\mathrm{d}u_2)^2+g_{33}(\mathrm{d}u_3)^2$$

(2) 面元：

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}=\mathrm{d}s_i\mathrm{d}s_j=h_ih_j\mathrm{d}u_i\mathrm{d}u_j$$

(3) 体元：

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}s_i\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=h_1h_2h_3\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3$$

2. 柱坐标 (ρ,φ,z)

(1) 度量：

$$g_{\rho\rho}=1,\ g_{\varphi\varphi}=\rho^2,\ g_{zz}=1$$

$$h_\rho=1,\ h_\varphi=\rho,\ h_z=1$$

(2) 线元：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}z^2$$

(3) 面元：

$$\mathrm{d}\sigma_{\rho\varphi}=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_{\rho z}=\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}\sigma_{\varphi z}=\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

(4) 体元：

$$\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

3. 球坐标 (r,θ,φ)

(1) 度量：

$$g_{rr}=1,\ g_{\theta\theta}=r^2,\ g_{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\theta$$

$$h_r=1,\ h_\theta=r,\ h_\varphi=r\sin\theta$$

(2) 线元：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$$

(3) 面元：

$$\mathrm{d}\sigma_{r\theta}=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}\sigma_{r\varphi}=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}\sigma_{\theta\varphi}=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

(4) 体元：

$$dV=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

1.2.3 曲线系中的向量分析

标量场梯度表达式

梯度定义为 $(\nabla\phi)_i \cdot ds_i = d\psi$
又由 $ds_i = h_i du_i$,$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u_i} du_i$
得到曲线坐标系下标量场梯度表达式：

$$(\nabla\phi)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial u_i}(\text{i 不求和})$$

∇ 表达式为:

$$\nabla = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\mathbf{e_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\mathbf{e_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\mathbf{e_3}$$

取 ψ 为坐标函数 u_i, 由 $\frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \delta_{ij}$ 得：

$$\nabla u_j = \frac{1}{u_j}\boldsymbol{e_j}(\text{j 不求和})$$

坐标基在直角坐标系下表达式

法一
由上式可得

$$\boldsymbol{e_j} = h_j \nabla u_j$$

在笛卡尔坐标系下表达梯度，即可得到坐标基在直角坐标系下表达式。
以球坐标系为例：
1. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
梯度 $\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right)$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

因此：

$$\nabla r = \frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} + \frac{z}{r}\hat{z} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$$

$$\mathbf{e}_r = h_r\nabla r = 1\cdot(\sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$$

2. $\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{x}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}} = -\frac{x}{r^2}\frac{1}{\sin\theta} = -\frac{x}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{y}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r\sin\theta}$$

因此：

$$\nabla\theta = -\frac{x}{r\sin\theta}\hat{x} - \frac{y}{r\sin\theta}\hat{y} + \frac{1}{r\sin\theta}\hat{z} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}$$

$$\mathbf{e}_\theta = h_\theta\nabla\theta = r\cdot(\cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}) = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}$$

3. $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

因此：

$$\nabla\phi = -\frac{y}{r^2\sin^2\theta}\hat{x} + \frac{x}{r^2\sin^2\theta}\hat{y} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$$

$$\mathbf{e}_\phi = h_\phi\nabla\phi = r\sin\theta\cdot(-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}) = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}$$

柱坐标系下同理。

法二

3. 在正交曲线坐标系中矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 与矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 之间的关系

由(2.8)式有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_i &= \frac{1}{H_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \\ &= \frac{1}{H_i}\frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k} \quad (i = 1,2,3).\end{aligned}$$

似乎更易理解。

由此整理柱坐标下基矢：

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{e}_\rho$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\boldsymbol{e}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\boldsymbol{e}_z$	0	0	1

球坐标：

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{e}_r$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$
$\boldsymbol{e}_\theta$	$\cos\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$-\sin\theta$
$\boldsymbol{e}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0

散度与旋度表达式

除使用定义推导球、柱坐标系下散度，也可使用上一节得到的 ∇ 算符。
如向量场 $\hat{A}$ 的散度在柱坐标系下的表达式为：

- 一般正交曲线系:

(1)梯度: $\nabla = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\boldsymbol{e}_1 + \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial}{\partial u_3}\boldsymbol{e}_3$

(2)散度: $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1} + \dfrac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial u_2} + \dfrac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3}\right]$

(3)旋度:
$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} = &\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_3}\right]\boldsymbol{e}_1 \\ &+ \frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(A_3h_3)}{\partial u_1}\right]\boldsymbol{e}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(A_2h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1h_1)}{\partial u_2}\right]\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

(4)Laplace 算符: $\nabla^2 = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{h_2h_3}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial u_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{h_3h_1}{h_2}\dfrac{\partial}{\partial u_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}\dfrac{\partial}{\partial u_3}\right)\right]$

- 柱坐标 (ρ, θ, φ)

(1) 梯度:
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

(2) 散度:
$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2\sin\theta A_\rho) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho A_\varphi)\right]$$

(3) 旋度:
$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} = &\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho A_\theta)\right]\boldsymbol{e}_\rho \\ &+ \frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sin\theta A_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}A_\rho\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

(4) Laplace 算符:
$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]$$

- 球坐标 (r, θ, φ)

(1) 梯度:
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

(2) 散度:
$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta r\sin\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi r)\right]$$

(3) 旋度:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right]\boldsymbol{e}_\varphi$$

(4) Laplace 算符:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

1.3　线性空间

1.3.1　线性空间

Definition 1.3.1 线性空间
线性空间是 R^3 空间的推广，又称**向量空间**或**线性流形** ***(linear manifold)***。其满足如下八条规则：

1. 零元：$\varphi + 0 = \varphi$
2. 负元：$\varphi + (-\varphi) = 0$
3. 单位元：$1\varphi = \varphi$
4. 加法交换律：$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$
5. 加法结合律：$(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)$
6. 加法分配律：$k(\varphi_1 + \varphi_2) = k\varphi_1 + k\varphi_2$
7. 数乘结合律：$(kl)\varphi = k(l\varphi)$
8. 数乘分配律：$(k + l)\varphi = k\varphi + l\varphi$

Definition 1.3.2 线性空间的维数 线性空间 L 中最大无关组的数目 n，记为 $dimL = n$.

Definition 1.3.3 线性空间的内积 对于数域 K 和线性空间 L, 内积为一个映射。

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : L \times L \to K$$

其满足:

1. 共轭对称：$\langle\varphi,\psi\rangle = \langle\psi,\varphi\rangle^*$ * 表示复共轭.
2. 对第二个元素线性：$\forall a \in K, \psi, \chi \in L$,

$$\langle\varphi, a\psi\rangle = a\langle\varphi,\psi\rangle$$

$$\langle a\varphi, \psi\rangle = a^*\langle\varphi,\psi\rangle$$

3. 非负性：$\langle\varphi,\varphi\rangle \geqslant 0$

Definition 1.3.4 向量的正交

$$\langle\varphi,\psi\rangle = 0$$

Definition 1.3.5 向量的模

$$|\varphi| = \langle\varphi,\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} = (\xi_i^*\xi_i)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Definition 1.3.6 向量的归一化

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{|\varphi|}$$

Definition 1.3.7 正交归一基的完备性

对于线性空间 L 上的正交归一基 $\{\varphi_i\}$, 如果有 L 上的向量 ψ 对所有的基向量 φ_i 都有 $\langle\psi,\varphi_i\rangle = 0$, 满足此关系的 ψ 当且仅当 $\psi = 0$ 才成立，则我们称这一正交归一基 $\{\varphi_i\}$ 是完备的.

Theorem 1.3.1 (*Gram-Schmidt* 正交化规则)n 维线性空间L 任意n 个线性无关的向量$\{\varphi_i\}$, 可用此规则构造出 n 个正交归一的向量 $\{\tilde{\varphi}_i\}$:

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{\varphi_i - \langle\tilde{\varphi}_1,\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_1 - \cdots\langle\tilde{\varphi}_{i-1},\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_{i-1}}{|\varphi_i - \langle\tilde{\varphi}_1,\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_1 - \cdots\langle\tilde{\varphi}_{i-1},\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_{i-1}|}$$

Definition 1.3.8 我们称具有内积的线性空间为**内积空间**. 具有内积的实线性空间即实内积空间称为**欧几里得 *(Euclidean)* 空间**，简称欧氏空间. 具有内积的复线性空间即复内积空间称为**酉空间** *(UnitarySpace)*.

1.3.2 *Hilbert* 空间

Definition 1.3.9 *Hilbert* **空间** 完备的内积空间称为 *Hilbert* 空间，记为 $\mathcal{H}$。

Definition 1.3.10 *Hilbert* **空间的内积**

$$\langle\varphi,\chi\rangle = \int_\Omega \varphi^*(x)\chi(x)\mathrm{d}x$$

Definition 1.3.11 *Hilbert* **空间的模**

$$|\ \varphi\ | = \langle\varphi,\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega \varphi^*\varphi\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Definition 1.3.12 *Hilbert* **空间的完备性理论**

通常称 *Hilbert* 空间是平方可积的空间，记为 L_2 空间. 当我们在 H 中选定正交归一的基 $\{\varphi_i, i = 1,2,\cdots,n\}, n$ 可以是 ∞ , 即无穷维的线性空间，对任何一个 $\varphi\in H$, 可以在 $\{\varphi_i\}$ 上展开 $\varphi = \xi_i\varphi_i$, 引入符号 $|\varphi(x)\rangle$ 代表 H 中的向量，在 $\{\varphi_i\}$ 中表示.

$$|\ \varphi(x)\rangle = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$$

是 n 维空间中的列向量.

记 $\langle\varphi(x)| \equiv (|\,\varphi(x)\rangle)^{+}$, 即 $|\,\varphi(x)\rangle$ 的复共轭加上转置，称为 $|\,\varphi(x)\rangle$ 的 *Hermite(厄米)* 共轭，是 n 维空间中的行向量.

$$\langle\varphi(x)\,| = (\xi_1^*, \xi_2^*, \cdots, \xi_n^*)$$

可得向量 $|\,\varphi(x)\rangle$ 的模长为

$$|\,\varphi\,| = \sqrt{\langle\varphi\,|\,\varphi\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\xi_i\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}|\,\xi_i\,|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对归一化的基向量 $|\,\varphi_i\rangle$, 此基向量的完备性可由下式表示

$$\sum_{i=1}^{n}|\,\varphi_i\rangle\langle\varphi_i\,| = 1$$

等式左边为 n 个 $n\times n$ 的矩阵之和, 右边为该 n 维 *Hilbert* 空间中的单位矩阵，基的这一完备性表达式在量子理论中经常被用到.

1.3.3 线性算符

1. 坐标变换 A :

$$\chi = A\varphi$$

2. 微分算符 D, ∇, ∇^2 :

$$D_x\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)$$

3. 对称算符和反对称算符:

$$S = \frac{1}{2}(B + \widetilde{B})$$
$$A = \frac{1}{2}(B - \widetilde{B})$$
$$B = S + A$$

4. 伴随算符 $A^\dagger$:

$$\langle A\varphi, \chi\rangle = \langle\varphi, A^\dagger\chi\rangle$$

5. 厄米算符：自伴算符

$$A^\dagger = A$$

6. 幺正算符

$$U^\dagger U = I$$

1.3.4 线性算符的特征值和特征向量

1. 特征方程：

$$A\varphi = \lambda\varphi$$

2. 可以化为：

$$(\lambda I - A)\varphi = 0$$

3. 这个齐次线性方程组有非零解的条件为:

$$|\lambda I - A| = 0$$

- 厄米算符的特征值是实数。
- 厄米算符的不同特征值的特征向量正交。